

旭川高専○渡辺美知子 古川正志  
 北大工 嘉数侑昇

1. はじめに

CAD, CAGDにおいて自由曲線・曲面の表現をどの様に選択するかは、これまで、経験に任されていることが多い。3次スプラインの場合、歪エネルギーが最小の曲線として導入されるが、曲線・曲面の補間の立場から見た場合3次スプラインがそれらを表す最適なモデルである保障は無いと言える。このような問題は補間の立場からは、表現式そのものをある基準下で定めなければ解決できないと考えられる。本研究ではカルバックの情報量から導かれるAICを表現式の良さを表す基準として採用し、B-スプライン曲面の最適補間表現式を求められることを報告する。

2. カルバックの情報量基準とAIC

カルバックの基準は、以下で定義される。

$$K = -f(x) \log[f(x)/g(x)] = -f(x) \log f(x) + f(x) \log g(x) \quad (1)$$

ここで、 $f(x)$ は真のモデルの確率分布であり、 $g(x)$ は真のモデルを近似するモデルである。カルバック基準では $f(x)$ は一定だから $f(x)$ と $g(x)$ の距離を表していると考えられる。真のモデルと近似モデルが一致するときは、 $K=0$ となり最小値となることが知られている。このカルバックの情報量からAICを導くことができ、AICは以下のように表される。

$$AIC = -2[\text{モデルの最大対数尤度}] + 2[\text{モデルの自由パラメータ数}] \quad (2)$$

ところで、真のモデルと近似モデルの誤差 $\varepsilon_i (i=1, 2, \dots, n)$ が正規分布の密度関数に従うとすれば、標準偏差を $\sigma$ と置いて、

$$f(\varepsilon_i) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2})^n \exp(-\varepsilon_i^2/2\sigma^2) \quad (3)$$

で与えられるから、対数尤度は

$$L = \sum_{i=1}^N \log\{(1/\sqrt{2\pi\sigma^2})^n \exp(-\varepsilon_i^2/2\sigma^2)\} = -(N/2) \log 2\pi e_i^2 - (1/2\sigma^2) \sum \varepsilon_i^2 \quad (4)$$

となる。Lが最大となるには $\partial L/\partial \sigma^2=0$ を解いて、 $\sigma_{max} = (1/N) \sum \varepsilon_i^2$ を得るからこれを代入し、

$$L_{max} = -(N/2) \{\log 2\pi + \log n^{\sigma_{max}^2} + 1\} \quad (5)$$

を得る。これからAICは、

$$AIC = N\{\log 2\pi + \log n^{\sigma_{max}^2} + 1\}$$

$$+ 2[\text{モデルのパラメータ数}]$$

をとなる。ここで、定数項を取り除いてAICを改めて

$$AIC = N \log e_i^2 + 2[\text{モデルのパラメータ数}] \quad (6)$$

と置いてよい。

3. B-スプライン補間曲面

B-スプライン補間曲面はカルテシアン曲面として、 $Q_{i,j}$ を制御点とすれば以下のように書ける。

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{k,i}(u) B_{h,j}(v) Q_{i,j} \quad (7)$$

但し、

$$B_{k,i}(u) = \begin{cases} 1 & (s_i \leq u < s_{i+1}) \\ 0 & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

$$B_{k,i}(u) = \frac{B_{i,k-1}(u-s_i)}{(s_{i+k-1} - s_k)} + \frac{B_{i+1,k-1}(s_{i+k}-u)}{(s_{i+k} - s_{i+1})}$$

$$B_{h,j}(v) = \begin{cases} 1 & (t_j \leq v < t_{j+1}) \\ 0 & \text{(それ以外)} \end{cases} \quad (8)$$

$$B_{h,j}(v) = \frac{B_{j,h-1}(v-t_j)}{(t_{j+h-1} - t_h)} + \frac{B_{j+1,h-1}(t_{j+h}-v)}{(t_{j+h} - t_{j+1})}$$

である。ここで、 $s_i, t_j$ はノットベクトルを示し、 $i=0, 1, 2, \dots, k-1$ と $j=0, 1, 2, \dots, h-1$ で

$$s_i = a_0 = 0 \quad i+1 \quad n$$

$$s_{i+4} = a_{i+1} = \sum_{x=1}^i c_x \quad s_{i+n+3} = a_n = \sum_{x=1}^n c_x \quad (9)$$

$$t_j = b_0 = 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots, k-1)$$

$$t_{j+4} = b_{j+1} = \sum_{y=1}^{j+1} c_y \quad t_{j+m+3} = b_m = \sum_{y=1}^m c_y \quad (10)$$

である。ノット $(s_i, t_j)$ において曲面上の点 $P_{i,j} (k-1 \leq i \leq n+k-1, k-1 \leq j \leq m+k-1)$ を補間するためには次式が成立しなければならぬ。

$$\sum_{x=1}^{i-k+1} \sum_{y=1}^{j-h+1} N_{i-x,k}(a_{i-3}) N_{j-y,k}(b_{j-3}) Q_{i-x,j-y}$$

$$= P_{i,j} \quad (11)$$

を満たさなければならない。いま、

$$V_x = \sum_{y=1}^{j-k+1} N_{j-y,k} (b_{j-y}) Q_{i-x,j-y} \quad (12)$$

と置くと、

$$\sum_{x=1}^{i-k+1} N_{i-x,k} (a_{i-x}) V_x = P_{i,j} \quad (13)$$

となる。従って、制御点  $Q_{i,j}$  を求めるためには式 12 からベクトル  $V_x$  を求め、これを用いて式 13 から  $Q_{i,j}$  を定める。しかし、これらを連立方程式で解くには、 $2(k-2)$ 本の端点条件の方程式が不足する。端点条件としては、

$$V_x = P_{0,j}, \quad V_x = P_{n+x-1,j} \quad (x=0, 1, \dots, (k-2)/2)$$

$$Q_{i,j} = V_0, \quad Q_{i,j} = V_{n+j-1} \quad (j=0, 1, \dots, (k-2)/2)$$

を与えるものとする。

このような補間を行うと AIC は、

$$AIC = N \log \sigma_{\text{max}}^2 + 2[(n+k)(m+h)] \quad (14)$$

となる。

#### 4. 数値実験

1/4球を例として位数  $k$  および補間点  $n \times m$  を変化させて AIC を計算した。位数 4 及び 6 の結果を表 1・2 に示す。図 1 は 1/4 球を横に 10 縦に 5 分割した補間点を示し、図 2 はそのとき得られる制御点を示す。図 3 はその補間曲面の出力である。これらから位数 4 の場合で補間点が多いほどよい補間であることが分かる。

#### 5. おわりに

自由曲面として形状表現が豊富な B-スプライン曲面を、補間曲面のモデルとして用い、最適な表現形式が存在することを示した。今後、最適制御点の作成アルゴリズムを開発する予定である。

#### 参考文献

- 1) 渡辺他：カルバック基準に基づく曲線・曲面の最適補間の研究－(第一報) B-スプライン曲線の最適補間－、1991年度精密工学会春期学術講演会講演論文集、1991、3
- 2) 赤池：情報量基準 AIC とは何か、数理科学、1976、3
- 3) 市田、吉本：20 スプライン関数とその応用、教育出版、1979
- 4) 山口：形状処理工学 [II]、1988

	5	10	15	25
5	16148.74	13580.87	13235.00	13736.88
10	15271.64	7834.43	5602.97	5588.35
15	15042.73	6987.53	2665.52	760.19
25	15569.60	7348.33	2257.71	-2487.32

表 1. 位数 (4,4) のときの AIC 値 (縦・横は  $u$  方向  $v$  方向の補間点数を示す)。

	5	10	15	25
5	17310.56	15202.25	14401.92	14941.19
10	16649.72	12901.59	10589.82	10810.39
15	16318.01	11970.22	7271.97	5527.76
25	16925.72	12487.86	7017.19	2087.69

表 2. 位数 (6,6) のときの AIC 値 (縦・横は  $u$  方向  $v$  方向の補間点数を示す)。

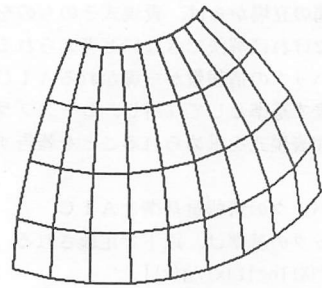


図 1. 1/4球を横10縦5分割した補間点のデータ。

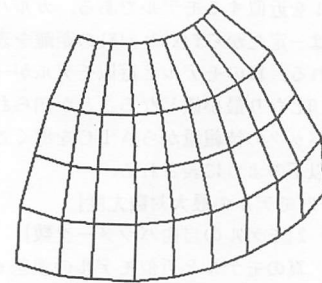


図 2. 図 1 から得られた制御点。

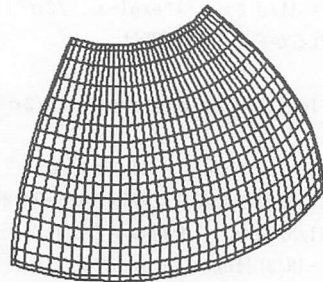


図 3. 図 2 から得られた補間曲面。